Rappels : $\mathcal{D}' * \mathcal{D} \subset C^\infty$

$\mathcal{E}' * \mathcal{D} \subset \mathcal{D}$; $\mathcal{E}' * C^\infty \subset C^\infty$

$T * \zeta_\varepsilon \longrightarrow T$ ds $\mathcal{D}'$

$\partial^\alpha (T * \varphi) = \partial^\alpha T * \varphi = T * \partial^\alpha \varphi$

$\mathcal{E}' * \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}'$

$T_n \longrightarrow T$ $\mathcal{D}'$ alors $\partial^\alpha (T_n * \varphi) \to \partial^\alpha (T * \varphi)$ uniformément sur tout compact.

Classe de Schwartz : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$p_{m,j}(\varphi) := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ |\alpha| \leq j}} \langle x \rangle^m |\partial^\alpha \varphi(x)| .$$

$\hookrightarrow |x|^m$

$\langle x \rangle := \sqrt{1 + |x|^2}$.

DÉFINITION (Distributions tempérées) :

Une distribution tempérée S est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$; $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ s'il existe m et $j \in \mathbb{N}$, et $C > 0$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \ |\langle S, \varphi \rangle| \leq C \, p_{m,j}(\varphi).$$

PROPOSITION : L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est stable par dérivation, par multiplication par une fonction C^∞ à croissance au plus polynômiale ainsi que ses dérivées, et par convolution par une distribution à support compact.

<u>Démonstration</u> : Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, et les entiers m et j associés : $\exists C > 0, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$|\langle S, \varphi \rangle| \leq C\, p_{m,j}(\varphi).$$

- Mq $\partial_k S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, alors $\langle \partial_k S, \varphi \rangle = -\langle S, \partial_k \varphi \rangle$, donc

$$|\langle \partial_k S, \varphi \rangle| \leq C\, p_{m,j}(\partial_k \varphi)$$
$$\leq C\, p_{m,j+1}(\varphi).$$

On conclut par densité : on sait que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, donc si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on définit $\partial_k S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ comme

$$\langle \partial_k S, \varphi \rangle := \lim_{n \to \infty} \langle \partial_k S, \varphi_n \rangle \text{ où } \varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$$

est une approximation de φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (et la limite ne dépend pas de la suite choisie).

- Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $\exists C, m$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $|\partial^\alpha f(x)| \leq C \langle x \rangle^m$.
Mq $fS \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, alors $\langle fS, \varphi \rangle = \langle S, f\varphi \rangle$.

Alors $|\langle fS, \varphi\rangle| \leq C\, p_{m,j}(f\varphi)$.

Mais $\exists\, m_j$ $\exists\, C_j$ tel que $\forall |\alpha| \leq j$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C_j \langle x\rangle^{m_j},$$

Alors $|\langle fS, \varphi\rangle| \leq \widetilde{C}\, p_{m+m_j,j}(\varphi)$,

on conclut comme ci-dessus par densité.

- Soit $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Mq $S * E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Comme $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $S * E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$,

et $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\langle S*E, \varphi\rangle := \langle S, \check{E} * \varphi\rangle$.

Alors $|\langle S*E, \varphi\rangle| \leq C\, p_{m,j}(\check{E} * \varphi)$

$$\leq C\, p_{m,j}(\langle E, \varphi(x+\cdot)\rangle).$$

Soit R, $\operatorname{supp} E \subset B(0,R)$, et soit k l'ordre de E. Alors $\forall \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$|\langle E, \psi\rangle| \leq C \sup_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |x| \leq R}} |\partial^\alpha \psi(x)|.$$

Mais $p_{m,j}\langle E, \varphi(x-\cdot)\rangle$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \langle x\rangle^m \sup_{|\alpha|\leq j} |\partial^\alpha \langle E, \varphi(x+\cdot)\rangle|$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \langle x\rangle^m \sup_{|\alpha|\leq j} |\langle E, \partial^\alpha \varphi(x+\cdot)\rangle$$

$$\langle x\rangle^m |\langle E, \partial^\alpha\varphi(x-\cdot)\rangle| \langle E, \langle x-\cdot+\cdot\rangle^m \partial^\alpha \varphi(x+\cdot)\rangle$$

$$\leq C\, p_{m,j+h}(\varphi).$$

On conclut comme précédemment par densité.

$$|\langle E, \underbrace{\langle x+\cdot\rangle^m \partial^\alpha \varphi(x+\cdot)}\rangle + \langle E, \langle\cdot\rangle^m \varphi(x+\cdot)\rangle$$

$$\leq C\, p_{m,\alpha+h}(\varphi) + C(1+R)^m p_{0,\alpha+h}(\varphi).$$

$$\left(\langle x+y-y\rangle^m \leq C\langle x+y\rangle^m + \langle y\rangle^m\right) \quad \square$$

<u>Quelques exemples</u> :

- $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$
- f C^0 à croissance polynômiale $\in \mathcal{S}'$

$$|\langle f,\varphi\rangle| = \left|\int f\varphi\right| \qquad \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

$$\leq C\int_{\mathbb{R}^d} \langle x\rangle^m \langle x\rangle^{-d-1-m}\,dx \times p_{d+1+m,0}(\varphi).$$

- $L^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ $\quad (\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^d))$, $1\leq p\leq\infty$

$$|\langle f, \varphi\rangle| = \left|\int f\varphi\right| \quad |\varphi(x)| \leq \langle x\rangle^{-\frac{d+1}{p'}}$$
$$\leq \|f\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^{p'}} \quad \to \varphi \in L^{p'}$$

- $x \mapsto e^x$ n'est pas dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

$$\langle e^x, \varphi\rangle = \int e^x \varphi(x)\, dx$$

$$\varphi(x) = e^{-\langle x\rangle^{1/2}} \qquad = \int e^x e^{-\langle x\rangle^{1/2}} = \infty.$$

- $f(x) = e^x e^{ie^x}$

Soit $g(x) = \frac{1}{i} e^{ie^x}$, alors $g'(x) = f(x)$

et $g' \in L^\infty \subset \mathcal{S}'$.

Donc $f \in \mathcal{S}'$: si $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle g', \varphi\rangle = -\langle g, \varphi'\rangle$$

donc $|\langle f, \varphi\rangle| \leq C \|\varphi'\|_{L^1}$

PROPOSITION : $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Alors $f : x \mapsto S * \varphi(x) := \langle S, \varphi(x - \cdot)\rangle$ est bien définie, elle est $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

et $\partial^\alpha f(x) = S * \partial^\alpha \varphi(x) = \partial^\alpha S * \varphi$.

<u>Démonstration</u> :

. f est bien définie : $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ donc ce n'est pas évident !

Pour commencer on prend $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et on conclura par densité. $\forall x \in \mathbb{R}^d$

$$|\langle S, \varphi(x-\cdot)\rangle| \leq C\, p_{m,j}(\phi_x),$$

où $\phi_x : y \mapsto \varphi(x-y)$. Soit $|\alpha| \leq j$

$$\langle y\rangle^m |\partial^\alpha \phi_x(y)| = \langle y-x+x\rangle^m |\partial^\alpha \varphi(x-y)|$$

$$\leq \sup_{z\in\mathbb{R}^d} \langle z\rangle^m |\partial^\alpha \varphi(z)|$$

$$+ \langle x\rangle^m \sup_{z\in\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha \varphi(z)|.$$

$$\leq C \langle x\rangle^m p_{m,j}(\varphi).$$

Donc par densité de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{S}$ on peut bien définir $S * \varphi(x)$ pour tout x, et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et on a

$$|S * \varphi(x)| \leq C\langle x\rangle^m p_{m,j}(\varphi). \quad (*)$$

. Montrons que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Soit $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi_n \to \varphi$ dans

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors $f_n(x) := S * \varphi_n(x)$ vérifie

$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d \quad \partial^\alpha f_n(x) = \langle S, \partial^\alpha \varphi_n(x - \cdot) \rangle$

Mais $\partial^\alpha \varphi_n(x - \cdot)$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

donc $\partial^\alpha f_n$ converge uniformément sur tout compact vers $\langle S, \partial^\alpha \varphi(x - \cdot)\rangle$ par $(*)_0$

donc $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, et $\partial^\alpha (S * \varphi) = S * \partial^\alpha \varphi$.

. Montrons que $S * \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$|\langle S * \varphi, \phi \rangle| = |\langle S, \check{\varphi} * \phi \rangle|$$

$$\leq C \, p_{m,j}(\check{\varphi} * \phi)$$

$$\check{\varphi} * \phi(x) = \int \check{\varphi}(y) \, \phi(x-y) \, dy$$

$$= \int \varphi(-y) \, \phi(x-y) \, dy$$

$$\langle x \rangle^m |\partial^\alpha (\check{\varphi} * \phi)(x)| \leq \int \overbrace{\langle y \rangle^m |\partial^\alpha \varphi(-y)|}^{L^1(\mathbb{R}^d)} \times \underbrace{\langle x-y \rangle^m |\phi(x-y)|}_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \, dy$$

$$\left(\langle x \rangle^m \leq C_m \langle x-y \rangle^m \langle y \rangle^m \right)$$

$$\leq (1+(x-y)^2)^m (1+y^2)^m$$

$$\leq \|\langle\cdot\rangle^m \partial^\alpha \varphi\|_{L^1} \, \|\langle\cdot\rangle^m \phi\|_{L^\infty}$$

$$\leq P_{m+d+1,j}(\varphi) \, P_{m,0}(\phi).$$

D'où le résultat. $\boxtimes$

$\mathcal{D}' \supset \mathcal{S}' \supset \mathcal{E}'$ $\qquad$ $\mathcal{S}' * \mathcal{S} \in C^\infty \cap \mathcal{S}'$

$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset C^\infty$

- Transformée de Fourier $L^1, \mathcal{S}, \mathcal{S}', L^2$
- Analyse spectrale
- Résolution d'EDP $(\Omega, \mathbb{R}^d)$

Solutions fondamentals d'opérateurs différentiel

DÉFINITION : Un opérateur différentiel sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire de $C^\infty(\Omega)$ sur lui-même, qui s'écrit sous la forme

$$\underbrace{P(D)}\, u(x) := \sum_{|\alpha| \leq n} \underbrace{a_\alpha(x)}\, \underbrace{D^\alpha} u(x)$$

où $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ et $D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \cdots D_{x_d}^{\alpha_d}$

et $D_{x_j} := \frac{1}{i} \partial_{x_j}$. ("symbole" de P $\xi \in \mathbb{R}^d$
$\sigma_P(\xi) = \sum a_\alpha(x) \xi^\alpha$)

Exemples : • Transport : $\partial_t + v \cdot \nabla$, (cinétiques) où $v = (v_1, \dots, v_d)$ et $\nabla = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_d})$.

$$\partial_t f + v \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla f = 0 \\ f_{|t=0}(x) = f_0(x) \end{cases} \quad \text{alors } f(t,x) = f_0(x - tv)$$

$$\left(\partial_t f = - v \cdot \nabla_x f \; ; \; \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0 \right).$$

- $\Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ (Laplacien)
- $\partial_t - \Delta$ (Chaleur)
- $\partial_t^2 - \Delta =: \Box$ (Ondes ; d'Alembertien)
- $i\partial_t - \Delta$ (Schrödinger)

DÉFINITION (Solution fondamentale) : Soit P un opérateur différentiel, avec des coefficients a_α constants dans $\mathbb{C}$. Une solution fondamentale de P est une distribution E sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $P(D)E = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Théorème : Soit P un opérateur différentiel à coefficient constant et soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors l'équation

$$P(D)f = S \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

a pour solution $f = E * S$. ← "superposition"

<u>Démonstration</u> : $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, donc $E * S$ est dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, et on sait que

$$\partial^\alpha (E * S) = \partial^\alpha E * S$$

Comme P est à coefficients constants on a donc

$$P(D)(E * S) = (P(D)E) * S .$$

[f, g, dans $\mathbb{R}$ $\quad a(x)(f*g)' = a(x)\, f' * g \neq (a(x) f') * g$ $\quad (P(D)f := a(x) f')$]

Mais $P(D)E = \delta_0$

donc $P(D)(E * S) = \delta_0 * S = S$. ■

<u>Exercice</u> : Solution fondamentale du Laplacien dans $\mathbb{R}^d$.

$$\begin{cases} \underline{d=1} : & E_1(x) = \frac{1}{2}|x|. \\ \underline{d=2} : & E_2(x) = \frac{1}{2\pi} \log|x| \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \\ \underline{d \geq 3} : & E_d(x) = c_d\, |x|^{-d+2} \quad \mathbb{R}^d \setminus \{0\}. \end{cases}$$

$|x|^2 = \sum x_i^2$

(Electostatique : $\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho$; $\vec{E} = -\nabla V$ $\quad \mathbb{R}^3$

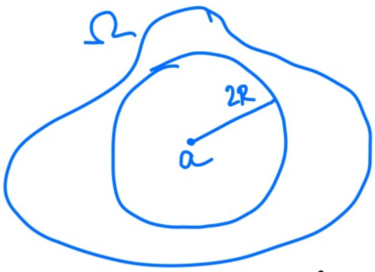
$-\varepsilon_0 \Delta V = \rho \quad (\rho \in C^\infty)$)

alors $V(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} E_3 * \rho(x) = \frac{1}{c_3 \varepsilon_0} \int \frac{1}{|x-y|} \rho(y)\, dy.$

<u>DÉFINITION</u> : On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est harmonique si $\Delta T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Théorème : Si T est une distribution harmonique dans Ω alors $T \in C^\infty(\Omega)$. (T s'identifie à une fonction C^∞)

Démonstration : Soit $a \in \Omega$ et $R > 0$ t.q. $B(a, 2R) \subset \Omega$.



Mq $T \in C^\infty(B(a, \frac{R}{2}))$ *

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi = 1$ dans $B(a, R)$ (de sorte que $\varphi T = T$ dans $B(a, \frac{R}{2})$) et $\operatorname{supp} \varphi \subset B(a, \frac{3R}{2})$.

Soit ζ_ε une suite régularisante, calculons

$$\Delta(\zeta_\varepsilon * (\varphi T)) = \zeta_\varepsilon * \Delta(\varphi T)$$

[* $\exists \psi \in C^\infty$ $\forall \phi \in \mathcal{D}(B(a, \frac{R}{2}))$, $\langle T, \phi \rangle = \int \psi \phi$]

$$\Delta(\varphi T) = \Delta\varphi \, T + \underbrace{\varphi \, \Delta T}_{= 0} + 2 \nabla\varphi \cdot \nabla T$$

$$= 0 \text{ dans } B(a, R) \leftarrow (**)$$

Mais alors $\Delta(\zeta_\varepsilon * (\varphi T)) = 0$ dans $B(a, R)$:

Mais $\operatorname{supp}(\zeta_\varepsilon * \varphi T) \subset \operatorname{supp} \zeta_\varepsilon + \operatorname{supp}(\varphi T)$
$\subset B(0, \varepsilon) + B(a, \frac{3R}{2})$

et $\operatorname{supp}(\zeta_\varepsilon * \Delta(\varphi T)) \subset \operatorname{supp} \zeta_\varepsilon + \mathbb{R}^d \setminus B(a, R)$ par $(**)$

Donc supp $(\zeta_\varepsilon * \Delta(\varphi T)) \subset \mathbb{R}^d \setminus B(a, R-\varepsilon)$

Donc $\Delta(\underbrace{\zeta_\varepsilon * \varphi T}) = 0$ dans $B(a, \frac{3R}{4})$ si $\varepsilon < \frac{R}{4}$.

Mais la formule de la moyenne implique que si $y \longmapsto \psi(y) = \varphi(|y|^2)$ (radiale) est $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support dans $B(0,R/4)$ et $\int_{B(0,R/4)} \psi(y)\,dy = 1$, alors $\forall x \in B(a, \frac{R}{2})$

$$\zeta_\varepsilon * \varphi T(x) = \int_{B(0,\frac{R}{4})} \zeta_\varepsilon * \varphi T(x+y)\, \varphi(|y|^2)\, dy \longleftarrow$$

[En effet : si $u \in C^\infty(\Omega)$ vérifie $\Delta u = 0$ dans Ω alors $u(x) = \int_{S^{d-1}} u(x + r\omega)\, d\sigma(\omega) \times |S^{d-1}|^{-1}$

$\forall r,\ 0 < r < d(x, \partial\Omega)$: c'est la formule de la moyenne. Soit $0 < r < R < d(x,\partial\Omega)$, on multiplie par $\varphi(r^2)\, r^{d-1}$ et on intègre en 0 et R. Alors

$$u(x) \int \varphi(|y|^2)\,dy = \int_{B(0,R)} u(x+y)\varphi(|y|^2)\,dy.$$
]

Donc $\zeta_\varepsilon * \varphi T(x) = \psi * (\zeta_\varepsilon * \varphi T)(x)$ dans $B(a, \frac{R}{2})$

Mais $\zeta_\varepsilon * \varphi T \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \varphi T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

donc $\psi * (\zeta_\varepsilon * \varphi T) \in C^\infty$ et $\partial^\alpha(\psi * (\zeta_\varepsilon * \varphi T))$ converge vers $\partial^\alpha(\psi * \varphi T)$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, uniformément sur tout compact. Mais alors

$$\varphi T = \psi * \varphi T \quad \text{dans } \mathcal{D}'\left(B\left(a, \tfrac{R}{2}\right)\right)$$

et comme $\psi * \varphi T$ est C^∞ alors φT est C^∞ dans $B(a, \frac{R}{2})$. Mais $\varphi T = T$ dans $B(a, \frac{R}{2})$, d'où T est C^∞ dans $B(a, \frac{R}{2})$. ■

$$\left[\begin{array}{l} T_{|B} : \forall \varphi \in \mathcal{D}(B), \\ \langle T_{|B}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle. \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{l} T \quad C^\infty \quad B(a, \tfrac{R}{2}) \\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \ \varphi \equiv 1 \text{ sur } \Omega \\ \varphi = \sum \varphi_j \qquad \varphi_j \in \mathcal{D}\, B(a_j, \tfrac{R_j}{2}) \\ \varphi T = \sum \varphi_j T \end{array}\right.$$

$$\varphi T \,\|\, T$$

TRANSFORMATION DE FOURIER.

I. Transformation de Fourier des fonctions sommables :

DÉFINITION : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on définit sa transformée de Fourier par : $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{F}f(\xi) := \hat{f}(\xi) := \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx$$

PROPOSITION (exercice) : Soit f et g dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, alors

- $\mathcal{F}f$ est continue sur $\mathbb{R}^d$, $\|\mathcal{F}f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$

et $\mathcal{F}f(\xi) \xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0$ (Riemann-Lebesgue)

- $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$.

$\hookrightarrow \int e^{-ix\cdot\xi} f*g(x)\,dx$

$$= \int e^{-ix\cdot\xi}\left(\int f(x-y)g(y)\,dy\right)dx$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \left(\int e^{-iy\cdot\xi} g(y)\,dy\right)\left(\int e^{-iy'\cdot\xi} f(y')\,dy'\right).$$

PROPOSITION : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, soit $m \in \mathbb{N}$,

Alors

- si $\langle\cdot\rangle^m f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\forall |\alpha| \leq m$ $\mathcal{F}f \in C^m$ et

$$\mathcal{F}(x^\alpha f) = i^{|\alpha|}\partial_\xi^\alpha \mathcal{F}f$$

- si $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ $\forall |\alpha| \leq m$, alors

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}f$$

ÉCHANGE DE RÉGULARITÉ ET DÉCROISSANCE

(Dém = exo !)

$$(i\xi)^\alpha = \prod_{j=1}^{d} (i\xi_j)^{\alpha_j}$$

$$= i^{|\alpha|} \prod \xi_j^{\alpha_j}$$